TEMA 5

ENDOMORFISMOS DIAGONALIZABLES.MATRICES DIAGONALIZABLES.

5.0 RECORDAR ENDOMORFISMOS

Un **endomorfismo** es una aplicación lineal de V_n en si mismo, es decir, $f \in EndV$ si $f : V_n \to V_n$ lineal .Si por $'+'$ definimos a la **suma** en $End(V_n)$ y por $'\,.\,'$ al producto de un escalar por un endomorfismo.

$(End(V_n), +, .)$ es un **espacio vectorial.**

Expresión matricial de las ecuaciones de f respecto de B

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{ni} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ o bien $Y = AX$

A :**matriz asociada a** f **respecto** de la **base** B.

$(a_{1i}, a_{2i}, \ldots\ldots, a_{ni})$ coordenadas de $f(e_i)$ en B.

Observar: Si f es un **edomorfismo** entre e.v.

f es **inyectiva** $\Leftrightarrow$ f es **suprayectiva** y por tanto:

$\boxed{\textbf{f es inyectiva} \Leftrightarrow \textbf{f es biyectiva}}$

MATRICES SEMEJANTES

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **matriz asociada** a f respecto de la **base** B.

Si existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $M = P^{-1}AP$, M y A son **semejantes**

y en ese caso

M es la **matriz asociada** a f respecto de **otra base** B' de V_n.

Es las colummas de P aparecen las coordenadas de los vectores de B' en la base B.

5.1 INTRODUCCIÓN

Sea $f_A : V_n \to V_n$ y sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz asociada a f respecto de una base B.

OBJETIVO:

Localizar, si es posible, una base B' respecto de la cual la **matriz asociada** a f, $\mathbf{D}_A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sea **diagonal.**

Si es posible, entonces existirá una matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$\mathbf{D}_A = P^{-1}\mathbf{A}P.$$

Es decir, encontraremos una matriz $\mathbf{D}_A$, diagonal siendo $\mathbf{D}_A$ y $\mathbf{A}$ matrices **semejante.**

BUSCAREMOS: Subespacios invariantes, autovalores, autovectores.

5.1 INTRODUCCIÓN (Subespacios invariantes

DEFINICION: Sea V e.v. , $\boxed{f : V \to V}$ endomorfismo.

$\boxed{1}$ $U \subset V$ es **invariante** por f si $\boxed{f(U) \subset U}$

$\boxed{2}$ Sea A_f matriz asociada a f respecto de una base B.

$\lambda \in \mathbb{R}$ es un **autovalor** (o valor propio) de f si $\boxed{\exists \bar{\mathbf{v}} \in V - \{\bar{0}\} \text{ t.q } f(\bar{\mathbf{v}}) = \lambda \bar{\mathbf{v}}}$

En ese caso $\bar{\mathbf{v}}$ es **autovector** asociado al autovalor λ

EJEMPLOS: $\begin{array}{cccc} f_A : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & (2x,y) \end{array}$; $A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Si $U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim U = 1$

Se cumple $f(U) \subset U$ en efecto; $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y por tanto

$$f(U) = L\left\{ f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = L\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = U$$

Se tiene $\boxed{f(U) = U.}$ Por tanto U es **invariante** por f

2) $\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Observamos que $f\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{u}}}$

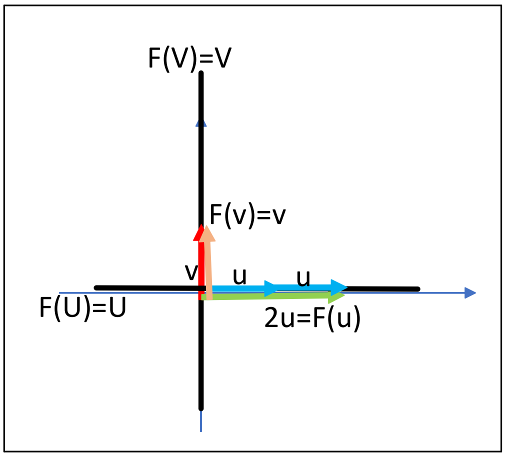
y por tanto $\boxed{f(\bar{\mathbf{u}}) = 2\bar{\mathbf{u}},}$ $\lambda = 2$ es **autovalor**, de f y

$\bar{\mathbf{v}}$ es **autovector** asociado al autovalor $\lambda = 2$

3) $\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observamos que $f\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{\mathbf{v}}}$

y por tanto $\boxed{f(\bar{\mathbf{v}}) = \bar{\mathbf{v}},}$ $\lambda = 1$ es **autovalor**, y

$\bar{\mathbf{w}}$ es **autovector** asociado al autovalor $\lambda = 1$



EJEMPLOS: $\begin{array}{cccc} f_A: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & (y,x) \end{array}$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Si $U = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(U) = \left\{ f\begin{pmatrix} a & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) = U$$

U es **invariante** por f. En este caso $f(U) = U$.

$\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observamos que $f(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{u}}$,

$\lambda = 1$ es **autovalor**, $\bar{\mathbf{u}}$ es **autovector** asociado al autovalor $\lambda = 1$

2) $\begin{array}{cccc} f_A: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & (y,x) \end{array}$;

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; f(\bar{\mathbf{v}}) = -\bar{\mathbf{v}},$$

$$f(V) = \left\{ f\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ & -1 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

$\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Observamos que $f(\bar{\mathbf{v}}) = -\bar{\mathbf{v}}$,

$\lambda = -1$ es **autovalor**, $\bar{\mathbf{v}}$ es **autovector** asociado al autovalor $\lambda = -1$

EJEMPLO: **Interpretaciòn geométrica .**

$\boxed{1}$ Simetria respecto de la bisectriz del primer cuadrante en $\mathbb{R}^2$

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \to & (y,x) \end{array} \; ; f(1,0) = (0,1); \; f(0,1) = (1,0) \quad A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Buscamos vectores que se transformar en **vectores de la misma dirección**

1A Sea $\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. . Sabemos que $f(U) = L\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = U$

y también que,

$\lambda = 1$ es **autovalor**, $\bar{\mathbf{u}}$ es **autovector** asociado al autovalor $\lambda = 1$

$\bar{\mathbf{u}}$ se tansforma en si mismo $f(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{u}}$ (vector de la misma dirección)

....

Pero el vector $\bar{\mathbf{u}}$ no es el único que lo cumple $f(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{u}}$

Observamos que también $\bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ cumple

$$f(\bar{\mathbf{w}}) = 1 \times \bar{\mathbf{w}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\bar{\mathbf{w}}}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \underset{\lambda}{1} \times \underset{\bar{\mathbf{w}}}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

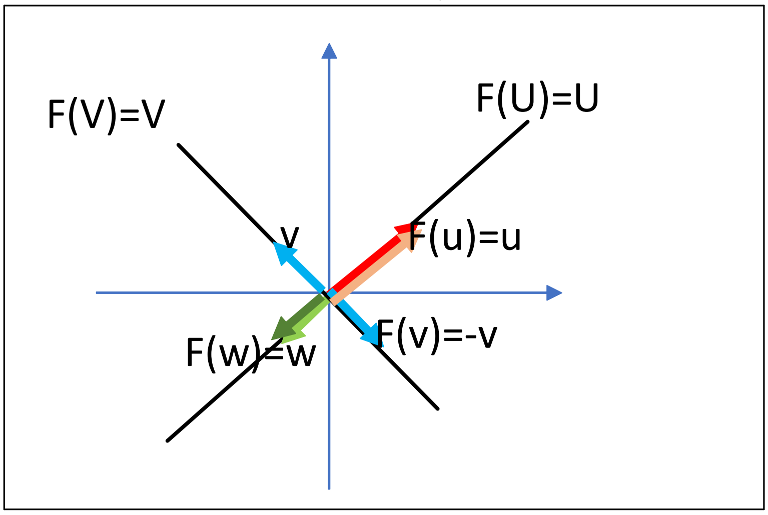
$\bar{\mathbf{w}}$ es **autovector** asociado al autovalor $\lambda = 1$

$\bar{\mathbf{u}}$ y $\bar{\mathbf{w}}$ son **autovectores asociados al mismo autovalor**

1B $\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Observamos que $f(\bar{\mathbf{v}}) = -\bar{\mathbf{v}}$,

$\lambda = -1$ es **autovalor**, $\bar{\mathbf{u}}$ es **autovector** asociado al autovalor $\lambda = -1$

$$f(\bar{\mathbf{v}}) = (-1)\bar{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\bar{\mathbf{v}}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underset{\lambda}{(-1)} \times \underset{\bar{\mathbf{v}}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$



$\boxed{2}$ **Giro de 90º** $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = (-y,x)$

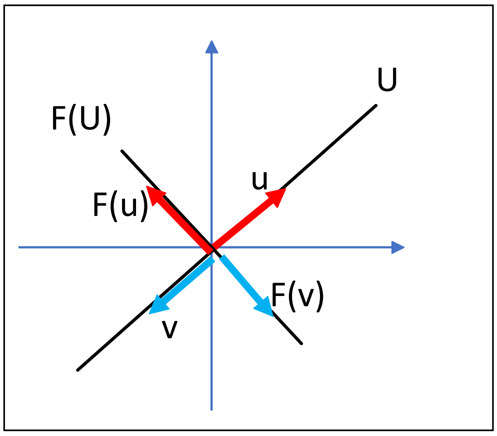
$f(1,0) = (0,1); f(0,1) = (-1,0)$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Veamos como se transforman los vectores a través de esta aplicación lineal en algunos ejemplos

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$$

$$;f(\bar{\mathbf{u}}) = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; f(\bar{\mathbf{v}}) = f\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$



$f(U) = L\left(\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \nsubseteq U;$ U **no** es **invariante** por f

Veamos que:

Ningún vector no nulo se transforma en otro de la misma dirección

En efecto: Si $f(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene solucón distinta de la trivial si y solo si

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0.$ Pero esta ecuación no tiene solución.

Por tanto,**ningún vector se transforma en otro de la misma dirección** **5·**

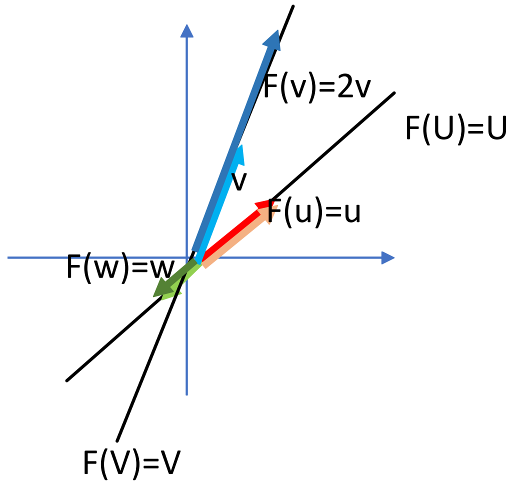
$\boxed{3}$ Consideremos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es $A_f = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Estudiar si $\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son autovectores asociados a los autovalores $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$

....

En efecto: $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



¿**Como obtenerlos autovalores** ?
Supoengamos que λ es un autovalor de f entonces, por definición

$$f(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema tiene solucón distinta de la trivial si y solo si

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Por tanto los autovalores buscados son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$

5.2 AUTOVECTORES. AUTOVALORES. AUTOESPACIOS.

NOTA: Trabajaremos con espacios vectoriales finitos

DEFINICIONES: Sea $f: V_n \to V_n$ endomorfismo de V_n.

Sea A matriz asociada a f respecto de una base B.

$\boxed{\lambda \in \mathbb{K} \text{ es un } \textbf{autovalor} \text{ (}\textbf{valor propio}\text{) de } f}$ si

existe un vector $\bar{v} \in V_n \backslash \{\bar{0}\}$ tal que $\boxed{f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}}$

a $\boxed{\bar{v} \text{ se le denomina } \textbf{autovector}}$ asociado al **autovalor** λ.

Espectro de f: $\big($ Conjunto de autovalores de $f\big)$

$$\boxed{\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \,/\, \lambda \text{ es autovalor de } f\} \ \textbf{espectro} \text{ de } f}$$

Autoespacio ò **s.v. propio** asociado a λ

$$\boxed{: V(\lambda) = \{\bar{v} \in V \,/\, f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}\} \ \ \textbf{autoespacio}}$$

Análogamente se definen $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **autovalor** (**valor propio**) de A y **espectro** de A : $\sigma(A)$

PROPIEDADES:Sea $f: V_n \to V_n$ endomorfismo de V_n.

1)Si $\lambda \in \sigma(f)$ entonces $V(\lambda)$ es un s.v. de V_n

Es decir : El conjunto formado por **todos los autovectores** asociado **a un mismo autovalor** λ es un s.v.

....

2) $$\left.\begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(f) \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{\bar{0}\}$$

Es decir:

Un vector no puede ser autovector asociado a dos autovalores distintos

....

3) $$\left.\begin{array}{l} \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \sigma(f) \text{ donde } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ si } i \neq j \\ \bar{x}_i \in V(\lambda_i) - \{\bar{0}\} \qquad i = 1, \ldots, m \end{array}\right\} \Rightarrow \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m\} \text{ l.i}$$

Es decir:

Dos autovectores asociados a dos autovalores distintos son vectores l.i.

....

4) $f(V(\lambda)) \subset V(\lambda)$ .Se dice que $V(\lambda)$ es un s.v. invariante por f

Es decir:

Todos los autoespacios son invariantes

5) $V(\lambda) = \ker(f - \lambda i_{V_n})$.

En efecto: Si λ es un autovalor de f, existe un vector $\bar{v}$ no nulo tal qque

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \Leftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda \bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda i_V(\bar{v}) = \bar{0} \Leftrightarrow (f - \lambda i_V)(\bar{v}) = \bar{0}$$

5.3 CARACTERIZACIÓN DE AUTOVALORES DE UN ENDOMORFISMO.

PROPIEDADES:(Caracterización de autovalores)

Sea $f: V_n \to V_n$ endomorfismo de V_n.

Sea A matriz asociada a f respecto de una base B

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\lambda = 0$ autovalor de $f \Leftrightarrow f$ no es inyectiva

$\lambda = 0$ autovalor de $A \Leftrightarrow rangA < n \Leftrightarrow \det A = 0$

....

$\lambda = 0$ autovalor de $f \Leftrightarrow$ existe un $\bar{v}$ no nulo tal que

$$f(\bar{v}) = \lambda\bar{v} = 0 \times \bar{v} = \bar{0}$$

Luego $\bar{0} \neq \bar{v} \in \ker f$. Por tanto f no es inyectiva

---

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de $f \Leftrightarrow \lambda - r$ es autovalor de $f - ri_{V_n}, \forall r \in \mathbb{K}$

$\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de $A \Leftrightarrow \lambda - r$ es autovalor de $A - rI_n, \forall r \in \mathbb{K}$

....

$\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de $f \Leftrightarrow$ existe un $\bar{v}$ no nulo tal que $f(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$

$f(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \Longleftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda\bar{v} = \bar{0} \Longleftrightarrow f(xv) - \lambda i_V(\bar{v}) = \bar{0} \Longleftrightarrow (f - \lambda i_V)(\bar{v}) = \bar{0}$

Por tanto

$f(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \Longleftrightarrow f(\bar{v}) - ri_V(\bar{v}) = \lambda i_V(\bar{v}) - ri_V(\bar{v}) \Longleftrightarrow f(\bar{v}) - ri_V(\bar{v}) = \lambda i_V(\bar{v}) - ri_V(\bar{v})$

$\Longleftrightarrow \left(f - ri_V\right)(\bar{v}) = (\lambda - r)i_V(\bar{v}) \Longleftrightarrow \left(f - ri_V\right)(\bar{v}) = (\lambda - r)\bar{v}$

Por tanto $\lambda - r$ es autovalor de $f - ri_{V_n}, \forall r \in \mathbb{K}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de $f \Leftrightarrow f - \lambda i_{V_n}$ no es inyectiva

$\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

....

En efecto

$\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de $f \Leftrightarrow$ existe un $\bar{v}$ **no nulo** tal que $f(\bar{v}) = \lambda\bar{v}$

$f(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \Longleftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda\bar{v} = \bar{0} \Longleftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda i_V(\bar{v}) = \bar{0} \Longleftrightarrow (f - \lambda i_V)(\bar{v}) = \bar{0}$

Por tanto $f - \lambda i_{V_n}$ no es inyectiva

Es decir $\ker(f - \lambda i_{V_n}) \neq \{\theta\}$

---

5) $V(\lambda) = \ker(f - \lambda i_{V_n})$

$\bar{v} \in V(\lambda) = \ker(f - \lambda i_{V_n})$ existe un $\bar{v}$ **no nulo** tal que $(f - \lambda i_{V_n})(\bar{v}) = \bar{0}$

y por tanto,

si $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de f asociado al autovector $\bar{v} \neq \bar{0}$, se cumple

$f(\bar{v}) = \lambda\bar{v} \Longleftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda\bar{v} = \bar{0} \Longleftrightarrow f(\bar{v}) - \lambda i_V(\bar{v}) = \bar{0} \Longleftrightarrow (f - \lambda i_V)(\bar{v}) = \bar{0}$

y de aqui $\bar{v} \in \ker(f - \lambda i_{V_n})$

....

COROLARIO: $\forall\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de f

$\sigma(f) = \left\{\lambda \in \mathbb{K} \ / \ f - \lambda i_{V_n} \text{ no es inyectiva}\right\}$ 8

OBSERVACIONES: **Un ejemplo**

Si A la matriz asociada a f en una base determinada

Sea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda I_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - \lambda I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Este sistema nos permitirá encontrar los distintos autovalores y los autovectores asociados a cada autovalor.

....

Búsqueda de los autovalores

El sistema tiene solucón distinta de la trivial si y solo si $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

Por tanto los autovalores buscados son $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$

$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \ / \ f - \lambda i_{V_n}$ no es inyectiva$\} = \{1(simple), 2(simple)\}$

A $\sigma(f)$ o $\sigma(A)$ se le denomina espectro de la aplicación lineal

Búsqueda de los autovectores

Para $\boxed{\lambda = 1}$

$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_2)$

Por tanto para localizar los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 1$ debemos encontrar el nucleo de la aplicación asociada a la matriz $A - I_2$.

$$(A - I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_2) = L(\{(1,1)\})$

$V(1)$ es el **autoespacio** asociado **al autovalor** $\lambda = 1$

....

Para $\boxed{\lambda = 2}$

$V(2) = \ker(f - 2i_{V_n}) = \ker(A - 2I_2)$

Por tanto para localizar los autovectores asociados al autovalor $\lambda = 2$ debemos encontrar el nucleo de la aplicación asociada a la matriz $A - 2I_2$.

$$(A - 2I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \end{cases}$$

$V(2) = \ker(f - 2i_{V_n}) = \ker(A - 2I_2) = L(\{(2,1)\})$

$V(2)$ es el **autoespacio** asociado **al autovalor** $\lambda = 2$

Observemos que $B = \{(1,1),(2,1)\}$ es una ba e de R^2 formada por autovectores

MAS PROPIEDADES DE LOS AUTOVALORES:

Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$

1)A y A^T tienen los mismos autovalores

2) λ autovalor de A $\Rightarrow k\lambda$ es autovalor de kA

En efecto:

$$A\overline{v} = \lambda\overline{v} \Leftrightarrow \left(kA\right)\overline{v} = (k\lambda)\overline{v}$$

3)λ autovalor de A $\Leftrightarrow \lambda - r$ es autovalor de $A - rI_n$

En efecto

$$A\overline{v} = \lambda\overline{v} \Leftrightarrow A\overline{v} - rI_n\overline{v} = \lambda I_n\overline{v} - rI_n\overline{v} \Leftrightarrow (A - rI_n)\overline{v} = (\lambda I_n - rI_n)\overline{v}$$

$\Leftrightarrow \lambda - r$ es autovalor de $A - rI_n$

4)λ autovalor de A y A **regular**$\Rightarrow$ λ^{-1} autovalor de A^{-1}

En efecto:

$$A\overline{v} = \lambda\overline{v} \Leftrightarrow \tfrac{1}{\lambda}\overline{v} = A^{-1}\overline{v} \Leftrightarrow A^{-1}\overline{v} = \lambda^{-1}\overline{v}$$

---

5)A y B semejantes $\Rightarrow A$ y B tienen los mismos autovalores

---

6) λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda^n$ autovalor de A^n

....

Sea λ autovalor de $A\overline{v} = \lambda\overline{v}$ para algún $\overline{v}$ no nulo entonces

$A^2\overline{v} = A(A\overline{v}) = A(\lambda\overline{v}) = \lambda A\overline{v} = \lambda\lambda\overline{v} = \lambda^2\overline{v}$

Supongamos $A^{n-1}\overline{v} = \lambda^{n-1}\overline{v}$.

Entonces

$A^n\overline{v} = A(A^{n-1}\overline{v}) = A(\lambda^{n-1}\overline{v}) = \lambda^{n-1}(A\overline{v}) = \lambda^{n-1}\lambda\overline{v} = \lambda^n\overline{v}$

---

7) A invertible $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ no es autovalor de A

....

En efecto

Si $\lambda = 0$ es autovalor de A existe no nulo tal que

$\Leftrightarrow A\overline{v} = 0\overline{v} \Leftrightarrow A\overline{v} = \overline{0} \Leftrightarrow \overline{0} \neq \overline{v} \in \ker A$

Por tanto A no es invertible

5.4 POLINOMIO CARACTERISTCO.ORDEN DE UN AUTOVALOR

Sea $f : V_n \to V_n$ endomorfismo de V_n.

Sea A matriz asociada a f respecto de una base B.

$\lambda \in \mathbf{K}$ autovalor de f $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{f} - \lambda\mathbf{i}$ no es inyectiva $\Leftrightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$ **ecuación característica**

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ **polinomio característico**

PROPOSICION:(Obtención de autovalores y autovectores)

1) λ autovalor de $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$

2) $\bar{x} \in V(\lambda) \Leftrightarrow \bar{x} \in \ker(f - \lambda i)$

PROPOSICIÓN: El polinomio característico no depende de la base elegida.

EJEMPLOS: En $\mathbb{R}^3$. Buscar y estudiar el espectro de las siguientes matrices

1 **Rotación de 90° alrededor del eje z**: $\sigma(f_A) = \{1\},\ V(1) = L(\{(0,0,1)\})$

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$ Sea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auto vector asociado a λ

entonces: $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Polinimio caracteristico

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

$\sigma(f) = \{1\}$ **espectro** de f

Autoespacio asociado a $\lambda = 1$

$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3)$

$$(A - I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0$$

Una base del s.v. $V(1)$ es $B_{V(1)} = \{(0,0,1)\}$

Por tanto $V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3) = L(0,0,1)$

$\boxed{2}$ Rotación de 180° alrededor del eje z

$\sigma(f) = \{-1, 1\},\ V(1) = L(\{(0,0,1)\}),\ V(-1) = L(\{(1,0,0),(0,1,0)\})$ •

$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; Sea $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ auto vector asociado a λ

entonces: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Polinimio caracteristico

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

$\sigma(f) = \{1$(doble), -1 (simple$\}$ **espectro** de f

Autoespacio asociado a $\lambda = 1$

$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3)$

$$(A - I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y = 0$$

Una base del s.v. $V(1)$ es $B_{V(1)} = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$

Por tanto$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3) = L(\{(1,1,0),(0,0,1)\})$

Autoespacio asociado a $\lambda = -1$

$V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3)$

$$(A + I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Una base del s.v. $V(-1)$ es $B_{V(-1)} = \{(1,-1,0)\}$

Por tanto$V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3) = L(\{(1,-1,0)\})$

Por las propiedades estudiadas sabemos que

$B = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,-1,0)\}$ es una base de R^3 formada por autovectores de f_A

$\boxed{\textbf{3}}$ Obtener el espectro de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y obtener una base de los autoespacios asociados a los los distintos autovalores.

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$\sigma(f) = \{1$(simple),5(simple), -1 (simple$\}$ **espectro** de f

Autoespacio asociado a $\lambda = 1$

$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3)$

$$(A - I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

Una base del s.v. $V(1)$ es $B_{V(1)} = \{(-2,-3,2)\}$

Por tanto$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3) = L\{(-2,-3,2)\}$

Autoespacio asociado a $\lambda = -1$

$V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3)$

$$(A + I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2y + 6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Una base del s.v. $V(1)$ es $B_{V(1)} = \{(0,-3,1)\}$

Por tanto$V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3) = L(\{(0,-3,1\})$

Autoespacio asociado a $\lambda = 5$

$V(5) = \ker(f - 5i_{V_n}) = \ker(A - 5I_3)$

$$(A - 5I_3)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

Una base del s.v. $V(5)$ es $B_{V(5)} = \{(0,0,1)\}$

Por tanto$V(5) = \ker(f - 5i_{V_n}) = \ker(A - 5I_3) = L\{(0,0,1)\}$

$\boxed{4}$ Estudiar : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

PROPOSICIÓN:

1) A y B semejantes $\Rightarrow$ A y B tienen el mismo polinomio caracteristico
2) El reciproco no se verifica en general

DEFINICION:

λ_0 autovalor de A de **orden** α

$\Leftrightarrow$ λ_0 es raiz de multiplicidad α de $\det(A - \lambda I) = 0$

EJEMPLO:

Rotación de 180° alrededor del eje z

$\sigma(f) = \{-1, 1\}$, orden $\lambda = -1$ es 2 (autovalor doble)

orden $\lambda = 1$ es 1 (autovalor simple)

PROPOSICIÓN: $1 \leq \dim V(\lambda_0) \leq \alpha$

5.5 ENDOMORFISMOS Y MATRICES DIAGONALIZABLES

OBSERVACIONES:

V_n e.v , $\dim V_n = n,\ f \in End(V_n)$,

A matriz asociadada a f respecto de una base B.

$\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\} = \sigma(f)$ y sea $d_i = \dim V(\lambda_i)$, α_i =orden(λ_i), $i = 1,\ldots,r$

Se verifica:

1) Si $\lambda_i \neq \lambda_j$ con $i \neq j$ entonces $V(\lambda_1) \oplus \ldots\ldots \oplus V(\lambda_r) \subset V_n$

Luego : $\dim(V(\lambda_1) \oplus \ldots\ldots \oplus \dim V(\lambda_r)) = d_1 + \ldots + d_r \leq n$

2) En V_n **existe una base de autovectores** de $f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow d_1 + \ldots + d_r = n \Leftrightarrow \begin{cases} a)\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n \\ b)\ \alpha_i = d_i \qquad i = 1,\ldots,r \end{cases}$$

3) Si f tiene n autovalores distintos, entonces en V_n existe una base de autovectores

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA:

Búsqueda ,si es posible,de una matriz diagonal semejante a la dada

NOTACION: $f(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i$, $AE_i = \lambda_i E_i$

PROPOSICION:

Sea V_n e.v. ,$\dim V_n = n, f \in End(V_n)$,

y D_f matriz asociada a f respecto de la base $B = \{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ de V_n.

Entonces: $D_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es **diagonal** $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow B = \{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ es una **base de vectores propios** de f

$\big(f(\bar{e}_i) = \lambda_i \bar{e}_i \qquad i = 1,\ldots,n\big)$

En ese caso: **a**) $d_{ii} = \lambda_i \qquad i = 1,\ldots,n$

b) ordenλ_i :nº de veces que λ_i figura en la diagonal principal

PROPOSICIÓN:(Diagonalización de endomorfismos.Diagonalización de matrices)

Sea $f : V_n \to V_n$ **endomorfismo** de V_n.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **matriz asociada** a f **respecto** de **una base** B.

Entonces

1 f **es diagonalizable** si lo es **cualquiera** de sus **matrices asociadas**.

2 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **es diagonalizable** sobre $\mathbb{K}$ **si** :

" $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que $D = P^{-1}AP$ es diagonal " (diagonalización por semejanza)

En ese caso:

D : **Forma diagonal** de A y P : **Matriz de paso**.

D está determinada salvo reordenación de los elementos de su **diagonal** que son los **autovalores** de A

En las **columnas** de P aparecen las coordenadas de los **autovectores** $E_1,..,E_n$ asociados, respectivamente, a los autovalores $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, de la matriz diagonal.

OBSERVACIÓN:

No toda matriz es diagonalizable., $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

¿Son matrices diagonalizables?

A$=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **B** $=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **C**$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$,

D$=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, **E**$=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

....

$\boxed{\textbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$ Conocemos ya

Polinimio caracteristico de A

$P(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$ $\sigma(f) = \{1\}$ **espectro** de f

Autoespacio asociado a $\lambda = 1$

$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3)$

A no es diagonalizable 1$=\alpha_1$ =orden$(\lambda_1) = 1$

$\boxed{\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Polinimio caracteristico

$P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$

$\sigma(f) = \{1$(doble), -1 (simple$\}$ **espectro** de f

Una base del s.v. $V(1)$ es $B_{V(1)} = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$

Por tanto$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3) = L(\{(1,1,0),(0,0,1)\})$

Una base del s.v. $V(-1)$ es $B_{V(-1)} = \{(1,-1,0)\}$

$B = \left\{ \underbrace{(1,1,0),(0,0,1)}_{B_{V(1)}}, \underbrace{(1,-1,0)}_{B_{V(-1)}} \right\}$ es una base de R^3 formada por autovectores de f$_A$

Además $f_C(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; f_C(\bar{e}_2) = \bar{e}_2; f_C(\bar{e}_3) = (-1) \times \bar{e}_3$

$$D = \mathbf{M}_f(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \mathbf{M}_f(B,B) = P^{-1}AP$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}, M_f(C_{R^3}, C_{R^3}) = \mathbf{C}$$

Conocemos

$\sigma(f) = \{1$(simple),5(simple), -1 (simple$\}$ **espectro** de f

$V(1) = \ker(f - i_{V_n}) = \ker(A - I_3) = L\{(-2,-3,2)\}$

$V(-1) = \ker(f + i_{V_n}) = \ker(A + I_3) = L(\{(0,-3,1\})$

$V(5) = \ker(f - 5i_{V_n}) = \ker(A - 5I_3) = L\{(0,0,1)\}$

or rd$(1) = 1 = \dim V(1)$; ord$(-1) = 1 = \dim V(-1)$, ord$(5) = 1 = \dim V(5)$

C es diagonalizable y además

$V(1) = L\{(-2,-3,2)\}; V(-1) = L(\{(0,-3,1\});\ V(5) = L\{(0,0,1)\}$

Nueva base $B = \left\{ \underset{\bar{e}_1}{(-2,-3,2)}, \underset{\bar{e}_2}{(0,-3,1)}, \underset{\bar{e}_3}{(0,0,1)} \right\}$

Además $f_C(\bar{e}_1) = \bar{e}_1; f_C(\bar{e}_2) = (-1) \times \bar{e}_2; f_C(\bar{e}_3) = 5 \times \bar{e}_3$

$$D = \mathbf{M}_f(B,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$D = \mathbf{M}_f(B,B) = P^{-1}AP$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPOSICIÓN:

Sea $f: V_n \to V_n$ endomorfismo de V_n.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matriz asociada a f . respecto de una base B

1) f es **diagonalizable** $\Leftrightarrow$ en V_n **existe** una **base** de **autovectores** de f

2) f es **diagonalizable** $\Rightarrow f$ tiene **n autovalores** en $\mathbb{K}$

y, f es $\boxed{\textbf{diagonalizable}}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a)\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n \\ b)\ \alpha_i = d_i \qquad i = 1, \ldots, r \end{cases}$

3) f tiene **n autovalores distintos** $\Rightarrow f$ es **diagonalizable**

5.6 APLICACIONES

Cálculo de la potencia n-ésima de una matriz

1) **Si A es diagonal**

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_p \end{pmatrix} \Rightarrow A^n=\begin{pmatrix} d_1^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2^n & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_p^n \end{pmatrix}$$

2) **Si A es diagonalizable**

$D = P^{-1}AP$ diagonal $\Rightarrow A = PDP^{-1} \quad \Rightarrow \quad A^n = PD^nP^{-1}$

EJEMPLO: Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, obtener A^7